
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Studijní program: B2612 – Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 2612R011 – Elektronické informační a řídicí systémy

Model filtračního proudění podzemních vod založený na kombinovaném přístupu a primární formulaci MKP

Modelling of the groundwater flow based on combined approach and primar formulation of FEM

Bakalářská práce

Autor:	Jan Palek
Vedoucí práce:	Ing. Otto Severýn, Ph.D.
Konzultant:	Ing. Miloslav Tauchman

V Liberci 10. 5. 2006

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé BP a prohlašuji, že **s o u h l a s í m** s případným užitím mé bakalářské práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své bakalářské práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Datum:

Podpis:

Poděkování

Především bych rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce panu Ing. Ottu Severýnovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté informace.

Dále děkuji konzultantovi mé bakalářské práce panu Ing. Miloslavovi Tauchmanovi za rady k praktické části práce.

V neposlední řadě děkuji svým rodičům za jejich materiální a duševní podporu, bez které by tato práce nemohla vzniknout.

Anotace

Náplní této bakalářské práce je do stávajícího programu 123Flow, který řeší úlohu filtračního proudění podzemních vod pomocí smíšené-hybridní formulace metody konečných prvků (MKP), zařadit model jehož výpočet je založen na primární formulaci MKP.

Po seznámení s použitým fyzikálním a matematickým modelem uvedeným v první kapitole se věnujeme implementaci zmíněného modelu do programu 123Flow. V modelu je možné používat prvky 1D, 2D i 3D. Toto je popsáno ve druhé kapitole. V poslední, třetí kapitole, jsou uvedeny testovací úlohy. Testujeme nejprve funkčnost samostatných modelů 1D, 2D a 3D oblastí a posléze i modelů kombinovaných.

Program 123Flow s implementací, vstupní soubory a výsledky testovacích úloh lze nalézt na přiloženém CD.

Klíčová slova: primární formulace, MKP, model

Abstract

The aim of this Bachelor Thesis is to integrate a new model into original program 123Flow. The calculation of the new model is based on primar formulation of finite elements method (FEM). The existing program 123Flow solves problem of groundwater flow based on mixed hybrid formulation of FEM.

There is briefly explained the used physical and mathematical model in first chapter. The second chapter gives a description of new model. In this model is possible to use elements of dimension 1D, 2D and 3D. In the third chapter is tested functionality of separated models and afterwards are tested combined models.

123Flow program, input files and results of testing problems is possible to find on enclosed CD.

Keywords: primar formulation, FEM, model

Obsah

OBSAH	6
SEZNAM OBRÁZKŮ	7
ÚVOD.....	8
1 PRIMÁRNÍ MODEL	9
1.1 Fyzikální podstata modelu	10
1.2 Primární formulace	11
1.3 Program Flow	14
2 IMPLEMENTACE	15
2.1 Implementace jádra.....	16
2.1.1 CALCULATION	17
2.1.2 SOLVE	19
2.1.3 POSTPROCESS	19
2.1.4 OUTPUT	19
2.2 Implementace výpočtu na 1D elementech	20
2.3 Implementace výpočtu na 2D elementech	23
2.4 Implementace výpočtu na 3D elementech	26
3 TESTOVACÍ ÚLOHY	28
3.1 Model s 1D elementy	29
3.1.1 TEST 1.....	29
3.1.2 TEST 2.....	32
3.2 Model s 2D elementy	34
3.2.1 TEST 3.....	34
3.2.2 TEST 4.....	37
3.3 Model s 3D elementy	39
3.3.1 TEST 5.....	39
3.4 Kombinovaný model	43
3.4.1 TEST 6.....	43
3.4.2 TEST 7.....	45
3.4.4 TEST 9.....	49
4 ZÁVĚR	51
LITERATURA.....	53

Seznam obrázků

obr. 1-0 - ilustrace sestavení globální matice.....	12
obr. 1-1 - kompatibilní spojení 2D a 1D	14
obr. 1-2 - nekompatibilní spojení 2D a 1D	14
obr. 1-3 - kompatibilní spojení 3D a 2D	14
obr. 1-4 - nekompatibilní spojení 3D a 2D	14
obr. 2-1 - bazová funkce 1D elementu	20
obr. 2-2 - bazové funkce 2D elementu	23
obr. 3-1 - 1D síť	29
obr. 3-2 - tlakové výšky na 1D.....	29
obr. 3-3 - rychlost proudění na 1D	30
graf 3.1 - test linearity 1D	30
tab. 3-1 - test linearity 1D	30
graf 3-2 - test linearity 1D	31
tab. 3-2 - test linearity 1D	31
obr. 3-4 – 1D síť	32
obr. 3-5 - tlakové výšky na 1D.....	32
obr. 3-6 - rychlost proudění na 1D	33
obr. 3-7 – 2D síť	34
obr. 3-8 - tlakové výšky na 2D.....	34
obr. 3-9 - rychlost proudění na 2D	35
graf 3.3 - test linearity 2D	35
tab. 3-3 - test linearity 2D	35
graf 3.4 - test linearity 2D	36
tab. 3-4 - test linearity 2D	36
obr. 3-10 – 2D síť	37
obr. 3-11 - tlakové výšky na 2D.....	37
obr. 3-12 - rychlost proudění na 2D	38
obr. 3-13 – 3D síť	39
obr. 3-14 - tlakové výšky na 3D.....	40
obr. 3-15 - rychlost proudění na 3D	40
graf 3.5 - test linearity 3D	41
tab. 3-5 - test linearity 3D	41
graf 3-6 - test linearity 3D	41
tab. 3-6 - test linearity 3D	41
obr. 3-16 - síť kombinace 2D a 1D	43
obr. 3-17 - výsledek kombinace pro $K = 10$	44
obr. 3-18 - výsledek kombinace pro $K = 1$	44
obr. 3-19 - výsledek kombinace pro $K = 0.01$	44
obr. 3-20 - síť kombinace 3D a 2D	45
obr. 3-21 - pole tlakových výšek kombinace 3D a 2D.....	45
obr. 3-22 - pole rychlostí pro $K = 10$	46
obr. 3-23 - pole rychlostí pro $K = 1$	46
obr. 3-24 - pole rychlostí pro $K = 0.01$	46
obr. 3-25 - síť kombinovaného modelu.....	47
obr. 3-26 - výsledek kombinace 1D a 2D	48
obr. 3-27 - síť kombinovaného modelu.....	49
obr. 3-28 - pole tlakových výšek.....	49
obr. 3-29 - pole rychlostí kombinace 3D a 2D.....	50
obr. 4-1 - ukázka zdvojených uzlů	51
obr. 4-2 – matice sousedních uzlů.....	52

ÚVOD

Tématem této bakalářské práce je rozšířit program 123Flow o možnost výpočtu úlohy filtračního proudění kapaliny pomocí primární metody konečných prvků. Cílem je implementovat a následně otestovat model s prvky dimenzí 1D, 2D a 3D a jejich kombinací.

Současný program 123Flow má výpočet veličin modelu proudění založen na smíšené-hybridní formulaci MKP. Výhoda použití primární oproti smíšené-hybridní MKP spočívá v menším počtu neznámých a tím i rychlejším výpočtu, neboť primární formulace vede na globální, symetrickou, pozitivně definitní matici, jejíž vyřešení není náročné, na rozdíl od indefinitní matice, na níž vede smíšená hybridní formulace.

Tato skutečnost může být pro primární formulaci pozitivem při výpočtu modelu s rozsáhlými diskretizačními sítěmi.

Cíle této práce je možné shrnout do následujících bodů:

- Seznámit se s fyzikální úlohou a s principem její aproximace pomocí MKP
- Implementovat model
- Otestovat model

Práce je rozčleněna do tří kapitol. V první kapitole je analytické vyjádření všech potřebných rovnic k sestavení modelu a seznámení s primární formulací MKP.

Druhá kapitola je věnována samotné implementaci. Lze zde nalézt popis struktury programu 123Flow a popis jednotlivých procedur. Zvlášť jsou probrány lokální matice jednotlivých typů elementů.

Ve třetí kapitole je testován implementovaný model. Nejprve jsou otestovány modely jednotlivých dimenzí a následně jsou uvedeny testy kombinovaných modelů.

1 PRIMÁRNÍ MODEL

Předtím než začneme popisovat vypracování stěžejního cíle práce, je nutné se seznámit s filtračním prouděním jako fyzikálním problémem, dále s problematikou týkající se matematické formulace a možností aproximace s využitím numerické metody konečných prvků, ve třetí podkapitole je zmíněn způsob spojení prvků různých dimenzí. Proto tuto kapitolu rozdělíme do tří částí:

- Fyzikální podstata modelu
- Primární formulace
- Program Flow123D

1.1 Fyzikální podstata modelu

Proudění kapaliny je popsáno dvěma diferenciálními rovnicemi – pohybovou rovnicí a rovnicí bilance hmoty (rovnice kontinuity). Pohybovou rovnicí, která určuje závislost pohybu kapaliny na silovém působení, je v případě proudění v porézním prostředí Darcyho zákon. Podrobněji rozepsáno v [5].

Fyzikální model proudění je určen:

1. Darcyho zákonem:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\nabla p \text{ na } \Omega, \quad (1)$$

kde $\mathbf{u} [ms^{-1}]$... vektor filtrační rychlosti proudění, $\mathbf{K} [ms^{-1}]$... tenzor propustnosti a ∇p ... gradient tlakové výšky.

2. rovnicí kontinuity:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = q \text{ na } \Omega, \quad (2)$$

kde $q [s^{-1}]$... hustota zdrojů kapaliny

3. okrajovými podmínkami:

- Dirichletova:

$$p = p_D \text{ na } \partial\Omega_D, \quad (3)$$

- Neumannova:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_N \text{ na } \partial\Omega_N, \quad (4)$$

- Newtonova:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma(p - p_{N_2}) = u_{N_2} \text{ na } \partial\Omega_U \quad (5)$$

kde σ ... koeficient přestupu, $p_D, p_{N_2} [m]$...hodnoty tlakové výšky na hranici oblasti, $u_N, u_{N_2} [ms^{-1}]$...hodnoty toku přes hranici oblasti

1.2 Primární formulace

Primární formulace úlohy spočívá v dosazení Darcyho zákona do bilanční rovnice a tím v získání rovnice v divergentním tvaru:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla p) = q \quad (6)$$

Protože tento vztah je parciální diferenciální rovnicí druhého řádu a analyticky není možné obecně vyjádřit tlakovou výšku (primární veličinu), je zapotřebí nalézt slabé řešení úlohy a tím získat řešení ve spojitě oblasti, která ale má nekonečně mnoho stupňů volnosti. Pro získání přibližného řešení je třeba spojitou oblast rozčlenit na množinu konečných stupňů volnosti, tím vzniká diskrétní problém.

Přesné řešení lze aproximovat pomocí numerických metod – metoda sítí, metoda konečných prvků, metoda konečných objemů ... V našem případě je použita **metoda konečných prvků**.

Ta je založena na rozdělení oblasti na konečný počet elementů, které mohou být různých dimenzí od 1D až po 3D. Prvky 1D jsou úsečky, 2D jsou pro náš případ trojúhelníky a jako 3D elementů je použito čtyřtětů. Princip aproximace diferenciální rovnice pomocí konečných prvků je, že hledanou funkci aproximujeme po částech polynomiálními funkcemi na každém z prvků. Tvar polynomiálních funkcí je popsán v další kapitole. Stejně tak je níže popsán postup sestavení lokální matice (každý element má svou lokální matici), jejíž prvky jsou dosazovány do matice globální. Globální matice je symetrická pozitivně definitní a má takový rozměr, kolik je uzlů v síti.

Po dosazení všech lokálních matic do globální je třeba vložit okrajové podmínky. Ty jsou zadány do jednotlivých uzlů (řádků) vektoru pravé strany a to buď v podobě tlakové výšky nebo ve formě toku.

V případě toku se zadaná hodnota okrajové podmínky jednoduše přičte do příslušného řádku vektoru pravé strany. Pro případ zadané tlakové výšky v uzlu je potřeba vzít všechny nenulové prvky sloupce globální matice daného uzlu a jednotlivě je vynásobit se zadanou hodnotou tlakové výšky a odečíst od

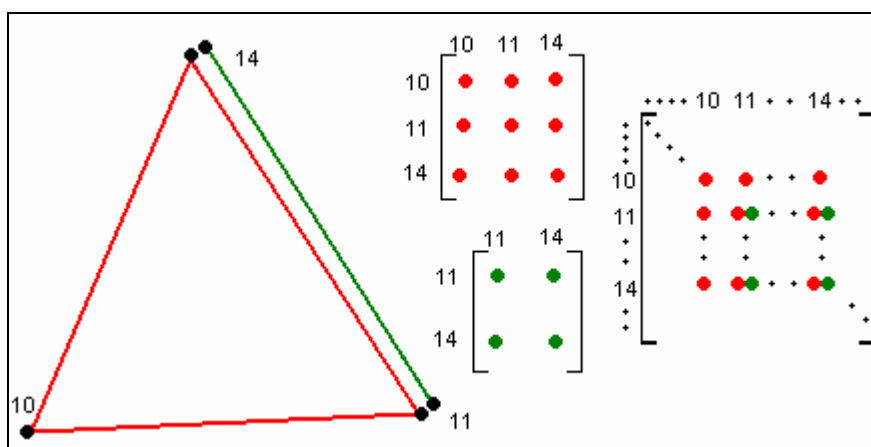
příslušného řádku vektoru pravé strany. Následně je nutné vynulovat všechny prvky v řádku a ve sloupci náležící danému uzlu a pouze na diagonálu vložit hodnotu 1. Na řádek vektoru pravé strany, který patří danému uzlu, se vloží zadaná hodnota tlakové výšky.

K získání tlakových výšek v jednotlivých uzlech už jen stačí vyřešit rovnici:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (7)$$

kde \mathbf{A} ...globální matice, \mathbf{b} ...vektor pravé strany a \mathbf{x} ...vektor hledaných tlakových výšek v uzlech.

Propojení a komunikace mezi elementy různých dimenzí je uskutečněna přes společné uzly sousedících elementů. Do globální matice se zapisují prvky lokálních matic všech elementů a to i různých dimenzí, jak je na obr. 1-0. Prvky lokální matice 1D elementu (zeleně) jsou v globální matici sečteny s příslušnými prvky lokální matice 2D elementu (červeně).



obr. 1-0 - ilustrace sestavení globální matice

Všeobecně lze uvést, že výhodou primární formulace je její relativně snadná realizace – jednoduché odvození formulace úlohy a nepříliš složitý algoritmus sestavení globální matice. Diskretizací rovnice řešíme soustavu pro primární veličinu p s menším počtem proměnných než tomu je ve smíšené nebo smíšené-hybridní formulaci MKP.

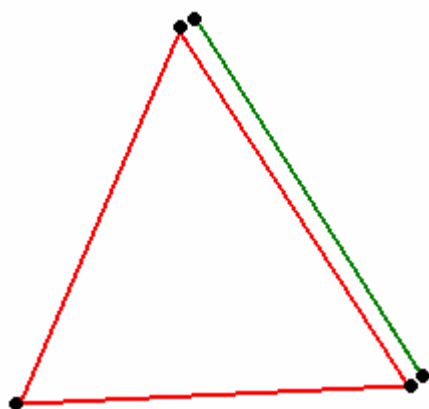
Nevýhodou však je skutečnost, že vypočteme primární veličinu p a filtrační rychlost u musíme následně vypočítat zpětným dosazením do Darcyho zákona. Tím je ztracena hladkost, filtrační rychlost se stává po elementech konstantní. Další nevýhodou je, že bilanční rovnice je v této formulaci splněna v obecném případě pouze na celé oblasti, nikoliv na jednotlivých elementech v síti.

Přesto poskytuje dostatečné výsledky k posouzení hydrogeologické situace.

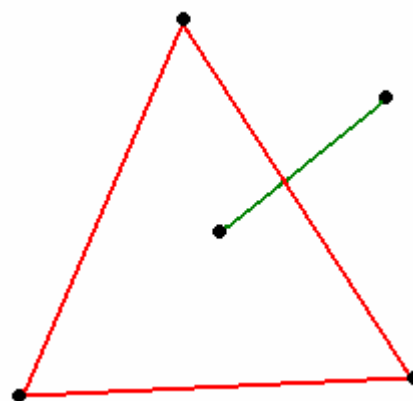
1.3 Program Flow

Velká výhoda programu 123Flow pro aplikaci primárního modelu spočívá v tom, že je založen na kombinovaném přístupu. Používá prvky tří dimenzí, kde 3D odpovídá poréznímu médiu, 2D puklinám a 1D kanálům. Program umožňuje dva způsoby propojení a to buď kompatibilní nebo nekompatibilní.

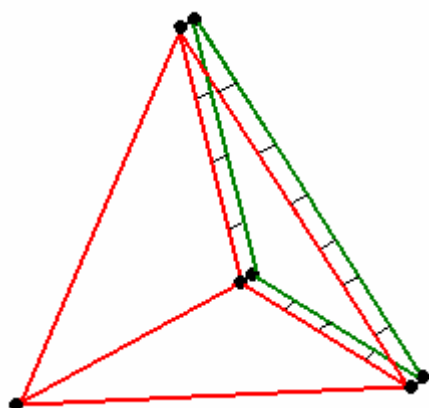
Prvky různých dimenzí jsou propojeny kompatibilně tehdy, má-li prvek s vyšší dimenzí celou jednu stěnu společnou právě s celým jedním prvkem nižší dimenze. Pro ilustraci jsou uvedeny příklady spojení.



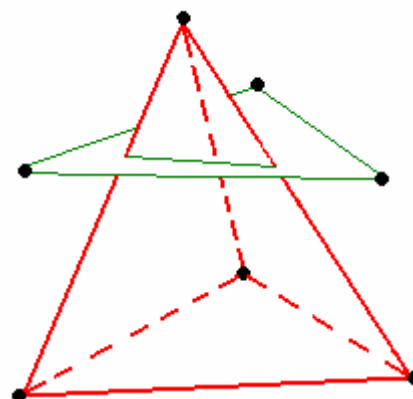
obr. 1-1 - kompatibilní spojení 2D a 1D



obr. 1-2 - nekompatibilní spojení 2D a 1D



obr. 1-3 - kompatibilní spojení 3D a 2D



obr. 1-4 - nekompatibilní spojení 3D a 2D

V této práci předpokládáme pouze kompatibilní spojování.

2 IMPLEMENTACE

Hlavním cílem práce bylo implementovat primární formulaci metody konečných prvků do programu 123Flow, jehož výpočty byly doposavad založeny pouze na smíšené hybridní formulaci MKP.

Rozšíření programu 123Flow o možnost primárního výpočtu lze rozdělit do čtyř podskupin:

- Implementace jádra
- Implementace výpočtu na 1D elementech
- Implementace výpočtu na 2D elementech
- Implementace výpočtu na 3D elementech

V následujících odstavcích se budeme věnovat popisu včlenění jednotlivých komponent do programu.

2.1 Implementace jádra

Program 123Flow počítá vektorové pole rychlostí filtračního proudění a skalární pole tlakových výšek pro případy ustáleného i neustáleného proudění. Samotný výpočet je spouštěn pomocí *.ini souboru, v němž jsou uloženy základní informace:

- Typ řešeného problému (1 – ustálené, 2 – neustálené proudění)
- Vstupní data (názvy a cesty souborů se vstupními daty)
- Obsluha programu (nastavení míry komunikace s uživatelem)
- Typ řešiče, přesnost výpočtu
- Výstupní data (název souboru s výstupními daty)

Podrobnější informace lze nalézt ve [2].

Nejprve bylo nutné ke stávajícím problémům (1,2) přidat problém další – *ustálené proudění založené na primární formulaci* (v programu označen číslem 5). V `main` proceduře byla tedy přidána třetí větev možnosti výpočtu.

Postup výpočtu je rozdělen do částí:

- Calculation
- Solve
- Postprocess
- Output

Tyto části si dále podrobněji popíšeme.

2.1.1 CALCULATION

V této proceduře se vykonávají následující výpočty:

- o Element calculation
- o Local primar
- o Node calculation
- o Matrix primar

Element calculation

Zde se provádí:

1. přiřazení materiálového tenzoru – tenzoru propustnosti daného elementu
2. výpočet metriky elementu, tzn. pro liniový element délka, pro trojúhelníkový obsah plochy a pro čtyřstěnový objem
3. výpočet středu elementu (pro vykreslení vektoru rychlosti ze středu elementu)

Local primar

Tuto proceduru si rozepíšeme v následujících kapitolách zvlášť pro jednotlivé typy elementů.

Node calculation

Toto je nejobsáhlejší část, co se týká implementace do 123Flow, neboť primární na rozdíl od smíšené formulace MKP počítá tlakovou výšku v uzlech diskretizační sítě, neboli bylo zde potřeba provést nejvíce změn. Provádí se zde hlavní příprava na sestavení globální matice.

Pro každý uzel:

1. se přiřadí číslo řádku v globální matici
2. se zjistí počet nenulových prvků vpravo od hlavní diagonály, tzn. najdou se sousední uzly s vyšším číslem řádku v globální matici.

Poznámka: Na hlavní diagonále se nachází uzel samotný, ostatní mimodiagonální prvky na daném řádku (k danému uzlu) matice jsou sousedé právě tohoto uzlu

3. vytvoří se pole čísel řádků (uzlů) nenulových prvků, neboli se vytvoří seznam sousedících uzlů.
4. vytvoří se pole hodnot odpovídajících pořadím poli z bodu 3., kde hodnota je součet všech příspěvků ze všech odpovídajících pozic lokálních matic elementů obsahujících daný uzel.
5. z okrajových podmínek se zjistí hodnota odpovídající pravé straně.

Make matrix

V proceduře `Node calculation` se získaly veškeré potřebné informace a data pro sestavení globální matice. Jsou to čísla řádků a sloupců a jim odpovídající hodnoty a hodnoty složek vektoru pravé strany. Z důvodu struktury globální matice v primární formulaci lze z dostupných řešičů použít pouze Matlab.

2.1.2 SOLVE

Poté, co se úspěšně provede procedura `Calculation`, je připraveno vše potřebné k vypočtení vektoru \mathbf{x} z rovnice (7).

Co se implementace týká, program `123Flow` byl s touto procedurou plně postačující, tedy tato část se obešla bez zásahů do struktury.

2.1.3 POSTPROCESS

Po úspěšném vyřešení soustavy \mathbf{n} rovnic o \mathbf{n} neznámých tedy známe hodnoty tlakových výšek v každém uzlu a nyní je třeba zjistit vektory rychlostí.

Každému elementu sítě se přiřadí:

- vektor rychlosti proudění a to tak, že se dosadí hodnoty tlakových výšek v uzlech elementu do Darcyho zákona, podrobněji rozebereme v kapitolách **Implementace výpočtu na xD elementu**.

2.1.4 OUTPUT

V této poslední části programu se vytvoří *.pos soubor s výsledky, tedy soubor pro GMSH – program pro zobrazení výsledků, který na síti oblasti zobrazí skalární pole tlaků na každém uzlu sítě a vektorové pole rychlostí proudění na každém elementu sítě – obsažen v příloženém CD .

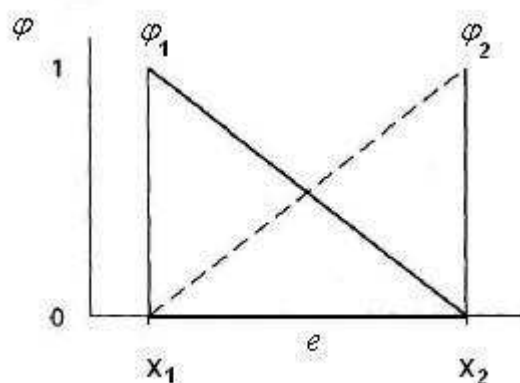
Podobně jako u procedury `Solve` nebylo nutné měnit stávající strukturu programu.

2.2 Implementace výpočtu na 1D elementech

V těchto kapitolách se budeme zabývat způsobem získání hodnot pro globální matici. Budeme řešit problematiku získávání lokálních matic elementů různých dimenzí.

Ve struktuře programu 123Flow se následující vyjádření lokálních matic nacházejí v proceduře Calculation \rightarrow local primar. a dopočet vektorů rychlostí nalezneme v proceduře Postprocess \rightarrow make element vector.

Pro výpočet prvků **lokální matice** je třeba nalézt koeficienty báзовých funkcí pro daný element. Symboly, které obsahují horní index e , přísluší lokálnímu souřadnému systému elementu. Pro případ 1D elementu použijeme báзовou (aproximační) funkci ve tvaru:



obr. 2-1 - báзовá funkce 1D elementu

$$\varphi_i(x) = \alpha_i + \beta_i x \quad (8)$$

$$\varphi_i\left(x_j^e\right) = \delta_{ij} \quad (9)$$

kde $\varphi_i \dots$ je bázová funkce i-tého uzlu elementu, $x_j^e \dots$ je j-tý uzel elementu e , δ_{ij} je Kroneckerovo delta ($= 1$ pro $i = j$; $= 0$ pro $i \neq j$) a pro 1D element $i, j \in \{1, 2\}$

po rozepsání dojdeme k maticovému vyjádření:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

po vyřešení 4 rovnic o 4 neznámých dostáváme pro každý koeficient:

$$\alpha_1 = \frac{x_2^e}{x_2^e - x_1^e} \Rightarrow \frac{x_1^e}{l} + 1 \quad (11)$$

$$\alpha_2 = \frac{x_1^e}{x_1^e - x_2^e} \Rightarrow -\frac{x_1^e}{l}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{x_1^e - x_2^e} \Rightarrow -\frac{1}{l}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \Rightarrow \frac{1}{l}$$

kde $x_2^e = l + x_1^e$ a l je vzdálenost uzlů v elementu, kterou je nutné zavést tehdy, jestliže hledáme řešení v dimenzi vyšší jak 1D.

Jestliže máme vyřešeny koeficienty bázových funkcí, je možné přistoupit k výpočtu prvků lokální matice elementu:

$$\begin{pmatrix} \int_e \mathbf{k} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{k} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 de \\ \int_e \mathbf{k} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{k} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 de \end{pmatrix} \quad (12)$$

kde $\mathbf{k} \dots$ koeficient propustnosti (na rozdíl od 2D a 3D se u 1D jedná o skalár), $\nabla \varphi_i \dots$ gradient bázové funkce, ze vztahu (8) je gradient roven:

$$\nabla \varphi_i = \beta_i \quad (13)$$

integruje se po elementu, v našem případě to znamená součin $\mathbf{k} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$ ještě vynásobit metrikou elementu – pro 1D je to délka linie.

Tyto hodnoty lokální matice jsou zaváděny do globální matice, pozice v globální matici je jednoznačně určena kombinací dvou příslušných uzlů v lokální matici, hodnoty na stejných pozicích globální matice se sčítají.

Vektor rychlosti na 1D elementu:

analyticky:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\nabla p$$

numericky:

v lokálním souřadném systému (s.s.) odpovídá:

$\nabla p_x = (p_1\beta_1 + p_2\beta_2) \dots$ gradient tlakové výšky ve směru osy x lokálního s.s.

$\nabla p_y = 0 \dots$ gradient tlakové výšky ve směru osy y lokálního s.s.

$\nabla p_z = 0 \dots$ gradient tlakové výšky ve směru osy z lokálního s.s.

potom:

$$u_x^e = -\mathbf{k}\nabla p_x \quad (14)$$

$$u_y^e = 0$$

$$u_z^e = 0$$

$$\mathbf{u}^e = \begin{pmatrix} u_x^e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

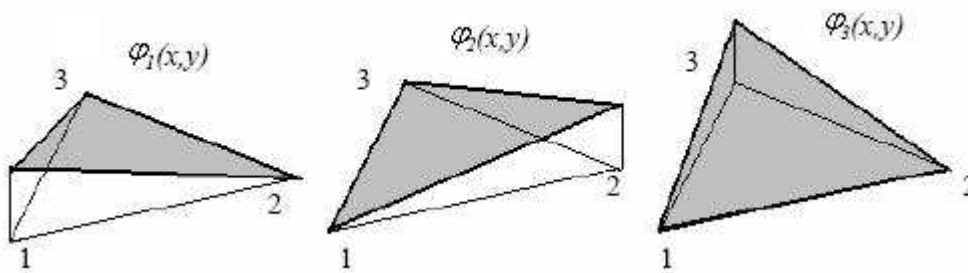
a převod do globálního souřadného systému spočívá ve vynásobení lokálního vektoru \mathbf{u}^e maticí složek jednotlivých jednotkových vektorů e_{ij} , kde $i \dots$ je index příslušící směru jednotkového vektoru lokálního s.s. a $j \dots$ je index složky i -tého jednotkového vektoru v globálním s.s.:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x^e & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$

2.3 Implementace výpočtu na 2D elementech

Lokální matice:

Bázová funkce 2D elementu má tvar:



obr. 2-2 - bázové funkce 2D elementu

$$\varphi_i(x, y) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y \quad (16)$$

funkce bude mít hodnoty analogicky s funkcí 1D elementů, tzn. je rovna Kroneckerovu delta, při rozepsání do maticové podoby platí rovnost:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

po úpravě platí:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{pmatrix}^{-1} \quad (18)$$

a opět po získání všech koeficientů bázových funkcí elementu lze přistoupit k výpočtu jednotlivých prvků lokální matice, tentokrát o rozměru 3×3 .

Lokální matice pro 2D element:

$$\begin{pmatrix} \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 de \\ \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 de \\ \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 de \end{pmatrix} \quad (19)$$

kde $\mathbf{K} \dots$ tenzor propustnosti ve tvaru: $\begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{pmatrix}$ a $\nabla \varphi_i \dots$ gradient

bázové funkce, ze vztahu (16) je gradient roven:

$$\nabla \varphi_i = (\beta_i \quad \gamma_i) \quad (20)$$

Integruje se po elementu, v našem případě to znamená součin $\mathbf{K} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$ ještě vynásobit metrikou elementu – pro 2D je to obsah plochy trojúhelníku.

Vektor rychlosti na 2D elementu:

analyticky:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla p$$

numericky:

v lokálním souřadném systému:

$\nabla p_x = p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2 + p_3 \beta_3 \dots$ gradient tlak. výšky ve směru osy x lokálního s.s.

$\nabla p_y = p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2 + p_3 \gamma_3 \dots$ gradient tlak. výšky ve směru osy y lokálního s.s.

$\nabla p_z = 0 \dots$ gradient tlakové výšky ve směru osy z lokálního s.s.

potom:

$$u_x^e = -(k_{xx} \nabla p_x + k_{xy} \nabla p_y) \quad (21)$$

$$u_y^e = -(k_{xy} \nabla p_x + k_{yy} \nabla p_y)$$

$$u_z^e = 0$$

$$\mathbf{u}^e = (u_x^e \quad u_y^e \quad 0)$$

převod do **globálního souřadného systému** je analogický s převodem pro 1D element, opět je lokální vektor rychlosti \mathbf{u}^e vynásoben maticí složek jednotkových vektorů:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x^e & u_y^e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (22)$$

kde \mathbf{u} je výsledný vektor filtrační rychlosti.

2.4 Implementace výpočtu na 3D elementech

Před sestavením lokální matice 3D elementu, je třeba zmínit, že se pohybujeme již v globálním souřadném systému.

Lokální matice:

Bázová funkce ve tvaru:

$$\varphi_i(x, y, z) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z \quad (23)$$

při rozepsání do maticové podoby:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

po úpravě:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}^{-1} \quad (25)$$

Lokální matice má rozměr 4×4 a výpočet je opět analogický k 1D a 2D:

$$\begin{pmatrix} \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_4 de \\ \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_4 de \\ \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_2 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_4 de \\ \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_4 \nabla \varphi_1 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_4 \nabla \varphi_2 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_4 \nabla \varphi_3 de & \int_e \mathbf{K} \nabla \varphi_4 \nabla \varphi_4 de \end{pmatrix} \quad (26)$$

kde \mathbf{K} ...tenzor propustnosti ve tvaru: $\begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{pmatrix}$ a $\nabla \varphi_i$...gradient

bázové funkce, ze vztahu (23) je roven:

$$\nabla \varphi_i = (\beta_i \quad \gamma_i \quad \delta_i) \quad (27)$$

Integruje se po elementu, v našem případě to znamená součin $\mathbf{K} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$ ještě vynásobit metrikou elementu – pro 3D element to je objem čtyřstěnu.

Vektor rychlosti na 3D elementu:

analyticky:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla p$$

numericky:

$$\nabla p_x = p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2 + p_3 \beta_3 + p_4 \beta_4 \dots \text{gradient tlakové výšky ve směru osy } x$$

$$\nabla p_y = p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2 + p_3 \gamma_3 + p_4 \gamma_4 \dots \text{gradient tlakové výšky ve směru osy } y$$

$$\nabla p_z = p_1 \delta_1 + p_2 \delta_2 + p_3 \delta_3 + p_4 \delta_4 \dots \text{gradient tlakové výšky ve směru osy } z$$

potom:

$$u_x = -(k_{xx} \nabla p_x + k_{xy} \nabla p_y + k_{xz} \nabla p_z) \quad (28)$$

$$u_y = -(k_{xy} \nabla p_x + k_{yy} \nabla p_y + k_{yz} \nabla p_z)$$

$$u_z = -(k_{xz} \nabla p_x + k_{yz} \nabla p_y + k_{zz} \nabla p_z)$$

$$\mathbf{u} = (u_x \quad u_y \quad u_z)$$

3 TESTOVACÍ ÚLOHY

Pro odladění a otestování správné funkčnosti implementovaného modelu je třeba použít jednoduchých testovacích úloh, u nichž známe analytické řešení nebo správné řešení intuitivně odhadneme.

Popisy úloh byly vytvořeny ručně, globální matici sestavil program 123Flow, k vyřešení byl použit program MATLAB a samotné vykreslení výsledků bylo zobrazeno programem GMSH.

Testovací úlohy pro přehlednost rozdělíme do několika následujících skupin:

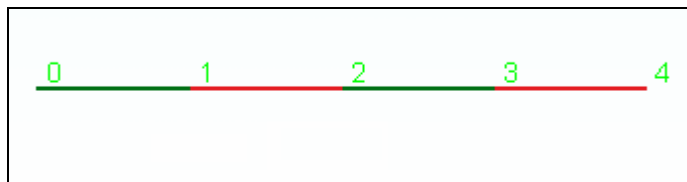
- Model s 1D elementy
- Model s 2D elementy
- Model s 3D elementy
- Kombinovaný model

Všechny zde použité testovací úlohy lze najít v příloženém CD.

3.1 Model s 1D elementy

3.1.1 TEST 1

Otestujeme správnost numerického výpočtu modelu s 1D elementy. Mějme kanál o délce $d = 4$ (viz obr.4-1), tlaková výška v uzlu 0: $P_0 = 1$ a v uzlu 4: $P_4 = 9$. Pro propustnost platí $K = 1$.



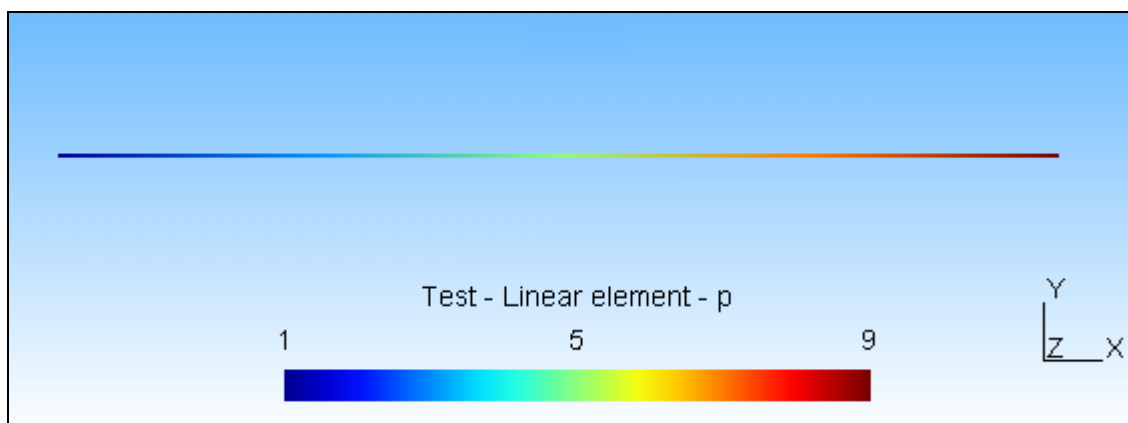
obr. 3-1 - 1D síť

Analytické řešení:

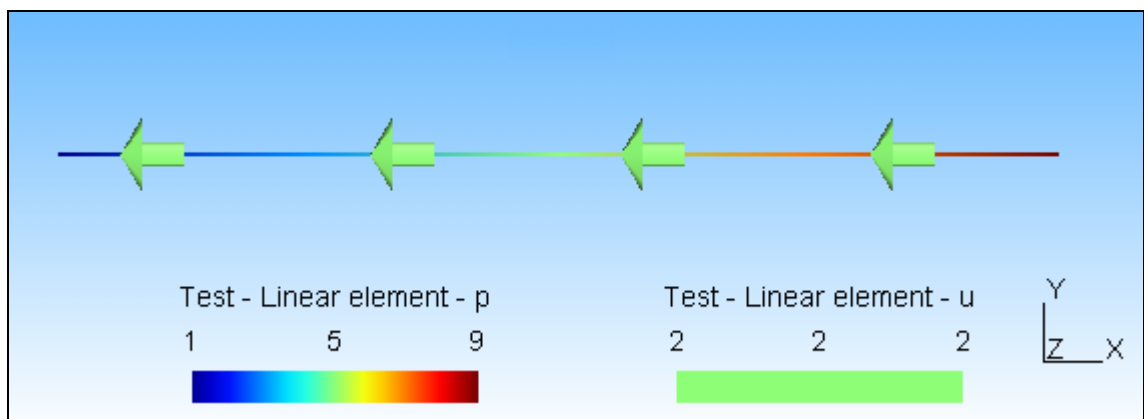
$$p = \frac{(p_4 - p_0)}{d}x + p_0 = \frac{(9-1)}{4}x + 1 = \underline{2x+1} \quad (29)$$

$$\mathbf{u} = -K\nabla p = -\nabla(2x+1) = \underline{-2}$$

Numerické řešení:

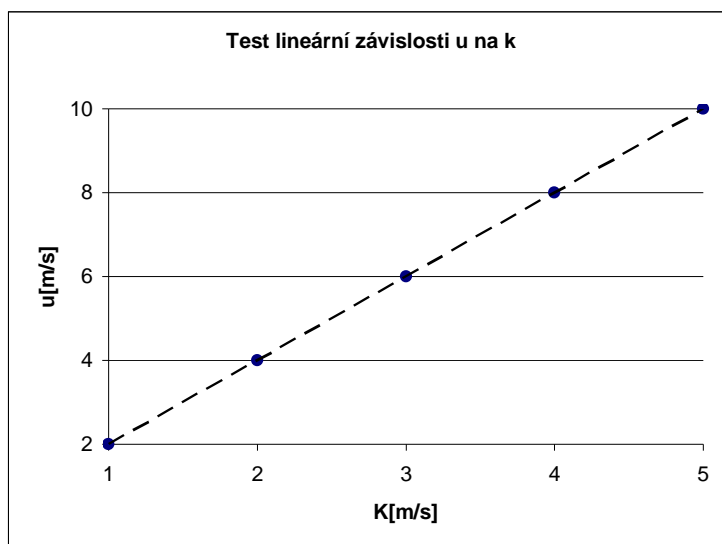


obr. 3-2 - tlakové výšky na 1D



obr. 3-3 - rychlost proudění na 1D

graf 3.1 - test linearity 1D



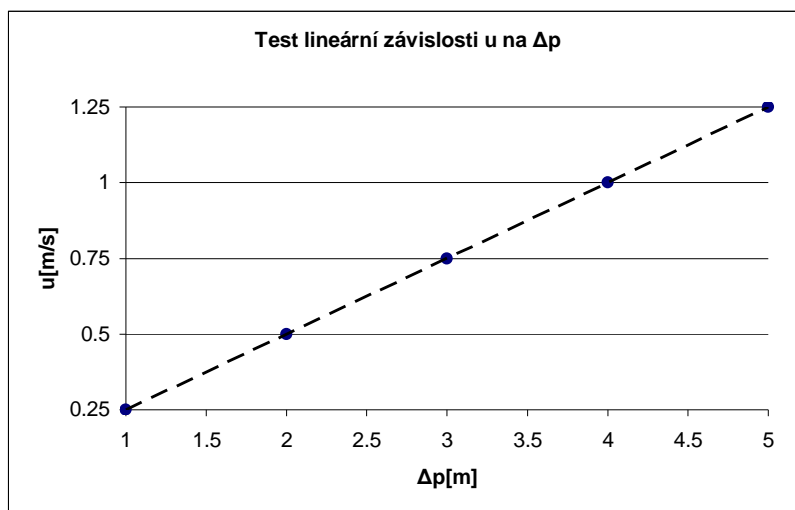
tab. 3-1 - test linearity 1D

K[m/s]	u[m/s]
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

kde rozdíl tlakových výšek mezi oběma konci kanálu je konstantně $\Delta p = 8$ a délka kanálu je $d = 4$.

graf 3-2 - test linearity 1D

tab. 3-2 - test linearity 1D



Δp [m]	u [m/s]
1	0,25
2	0,5
3	0,75
4	1
5	1,25

kde koeficient propustnosti je konstantně $k = 1$ a délka kanálu $d = 4$.

Výsledek testu:

Na liniovém kanálu s předepsanou propustností a danými okrajovými podmínkami ve formě tlakových výšek na obou koncích je z analytického řešení zřejmé, že jde o lineární závislost velikosti tlakové výšky na poloze.

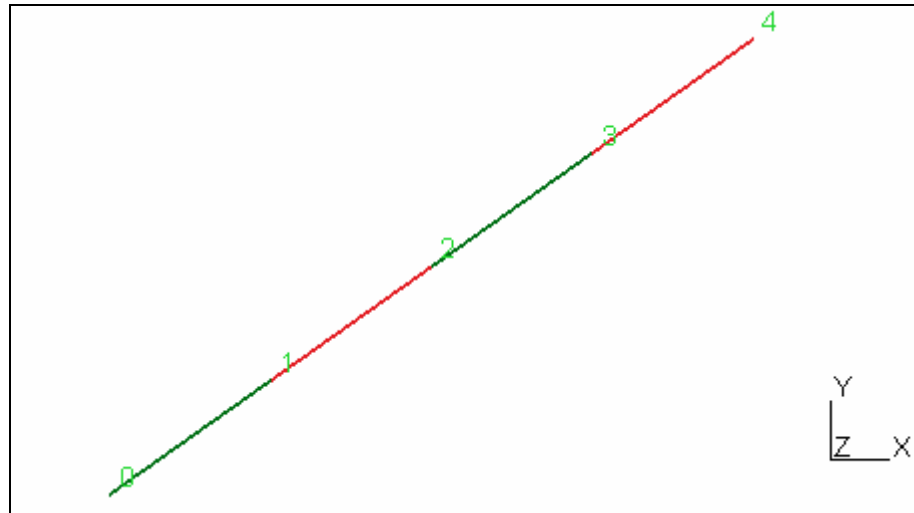
Z numerického řešení na obrázku 4-2 a 4-3 vyplývá, že odpovídá řešení analytickému.

Dva grafy s tabulkami ukazují, že v prvním případě je velikost toku lineárně závislá na měnícím se koeficientu propustnosti a ve druhém případě je velikost toku lineárně závislá na měnícím se rozdílu tlakových výšek mezi oběma konci kanálu.

3.1.2 TEST 2

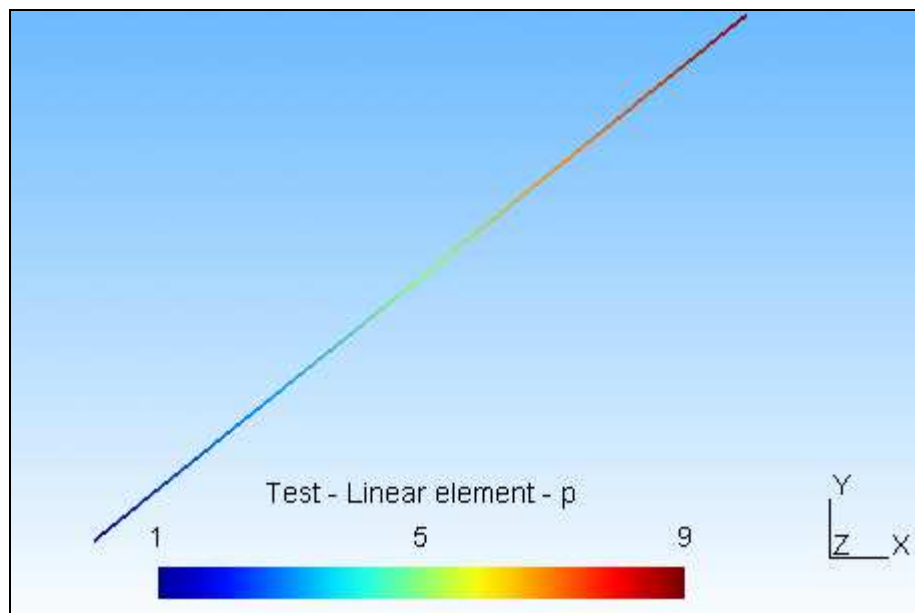
Použijeme úlohu z prvního testu pozměněnou o natočení kanálu o obecný úhel 38° a posunutí o vektor $[2,2,1]$ – neboli testujeme nezávislost sítě na volbě souřadného systému. Výsledky by měly být totožné s výsledky předešlého testu.

Sít':



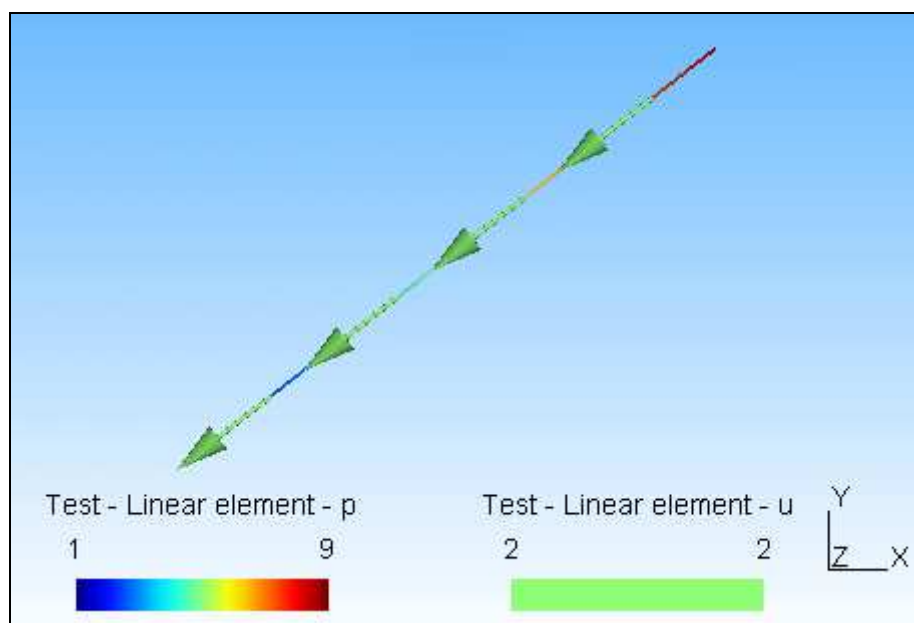
obr. 3-4 – 1D sít'

Rozložení tlakových výšek:



obr. 3-5 - tlakové výšky na 1D

Vektory rychlosti proudění:



obr. 3-6 - rychlost proudění na 1D

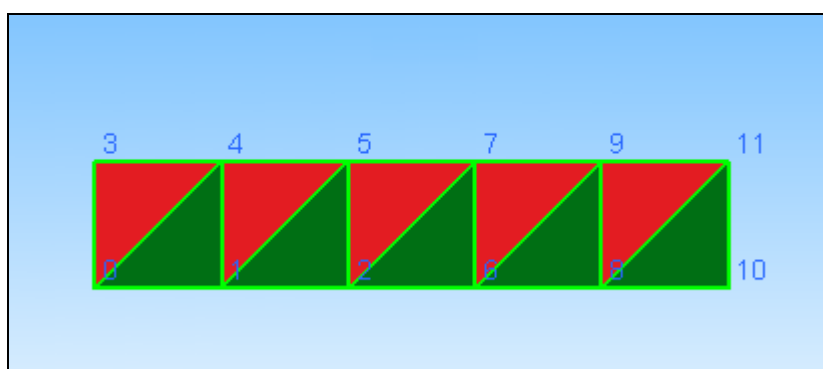
Výsledek testu:

Numerické řešení testu prvního a druhého je shodné, tedy volba sítě je nezávislá na poloze a natočení souřadného systému.

3.2 Model s 2D elementy

3.2.1 TEST 3

Analogicky s úlohou s 1D elementy použijeme kanál (obr.4-7), na jehož koncích předepíšeme Dirichletovy okrajové podmínky a to tak, že na uzly 0 a 3: $P_{03} = 10$, a v uzlech 10 a 11: $P_{1011} = 0$, při délce kanálu $d = 5$ a propustnosti $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



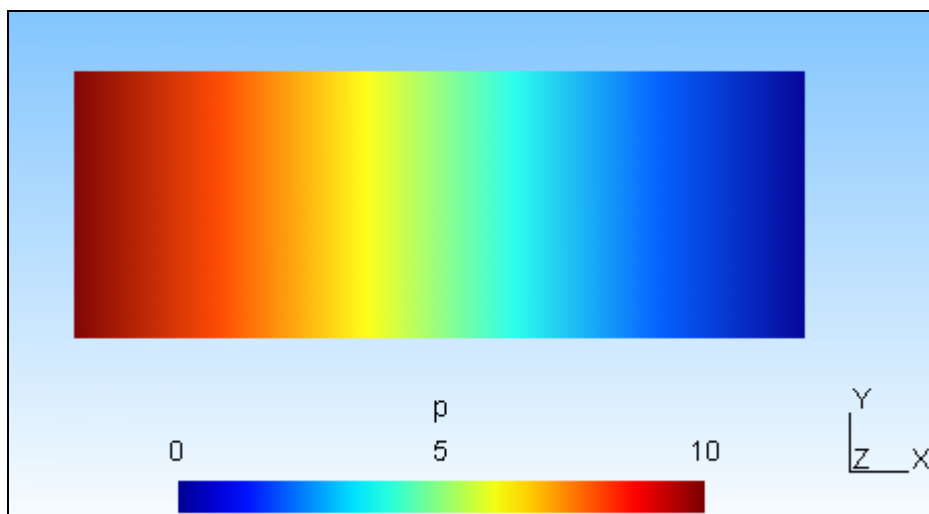
obr. 3-7 – 2D síť

Analytické řešení (ve směru osy x):

$$u = -\frac{K}{d}(p_{1011} - p_{03}) = -\frac{1}{5}(0 - 10) = \underline{2} \quad (30)$$

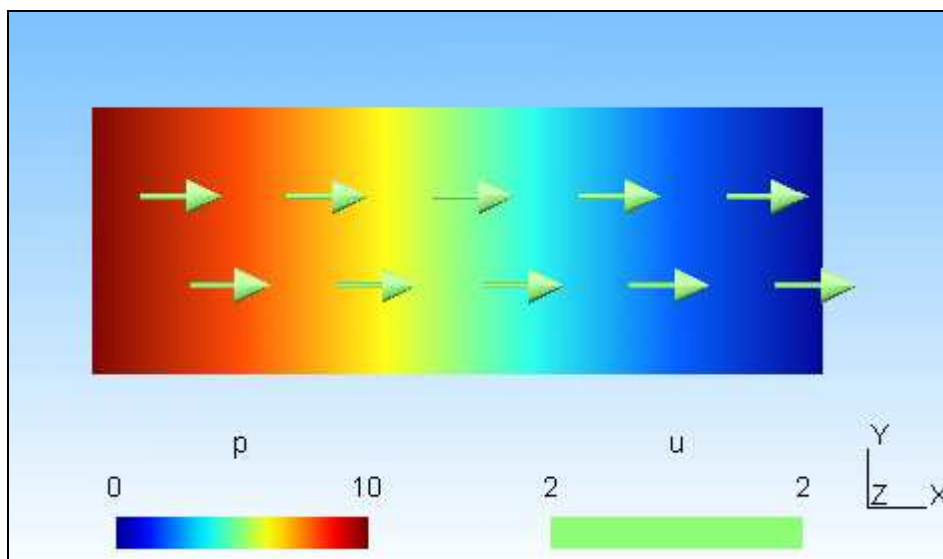
Numerické řešení:

Rozložení tlakových výšek:



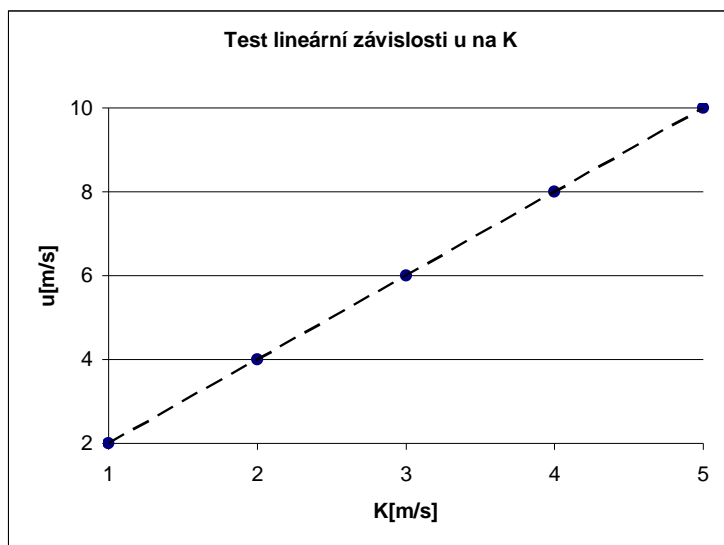
obr. 3-8 - tlakové výšky na 2D

Vektorové pole rychlostí:



obr. 3-9 - rychlost proudění na 2D

graf 3.3 - test linearity 2D



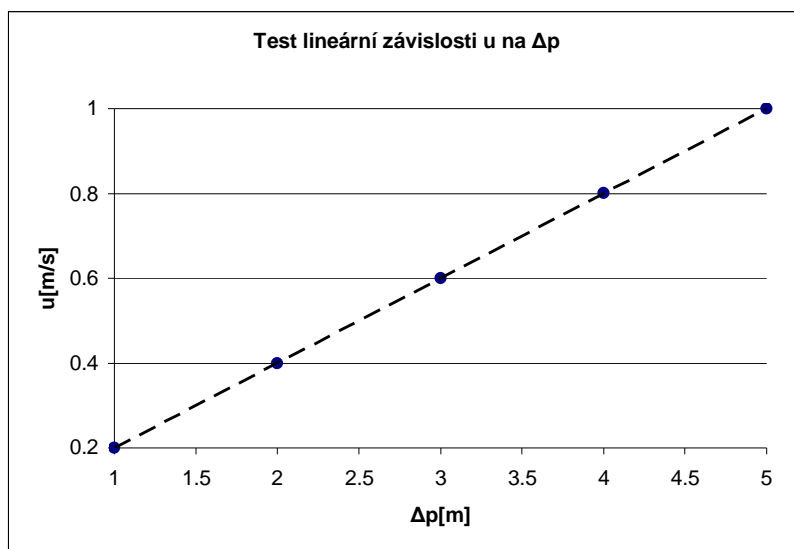
tab. 3-3 - test linearity 2D

K[m/s]	u[m/s]
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

kde rozdíl tlakových výšek mezi oběma konci kanálu je konstantně $\Delta p = 10$ a délka kanálu je $d = 5$.

graf 3.4 - test linearity 2D

tab. 3-4 - test linearity 2D



Δp [m]	u [m/s]
1	0,2
2	0,4
3	0,6
4	0,8
5	1

kde tenzor propustnosti K je jednotková matice a délka kanálu je $d = 5$.

Výsledek testu:

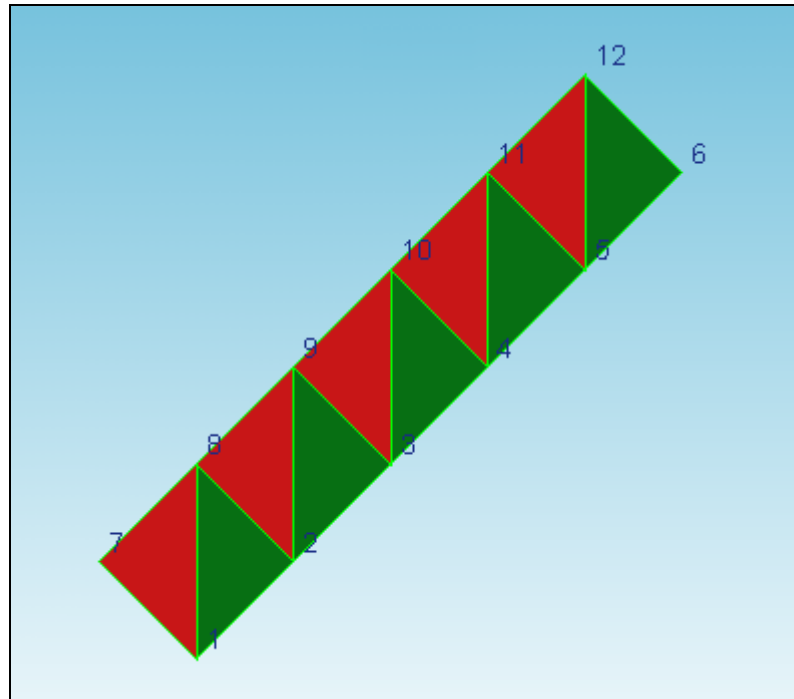
Analytické řešení tlakových výšek i rychlosti se shoduje s řešením numerickým.

Grafy s tabulkami ukazují, že tok je lineárně závislý na měnícím se tenzoru propustnosti a že je také lineárně závislý na měnícím se rozdílu tlakových výšek mezi oběma konci 2D kanálu.

3.2.2 TEST 4

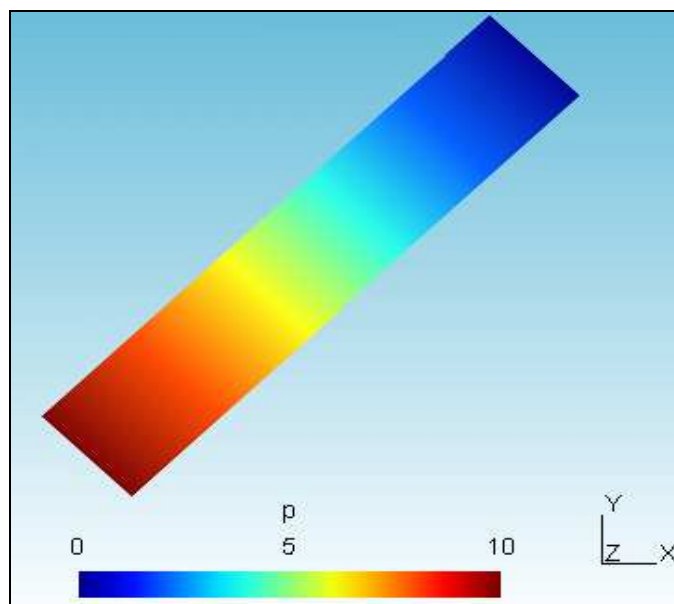
Opět použijeme úlohu z předchozího testu pozměněnou o natočení kanálu o obecný úhel tentokrát 45° . Jedná se o test nezávislosti sítě na volbě souřadného systému. Výsledky by měly být totožné s výsledky předešlého testu.

Sít':



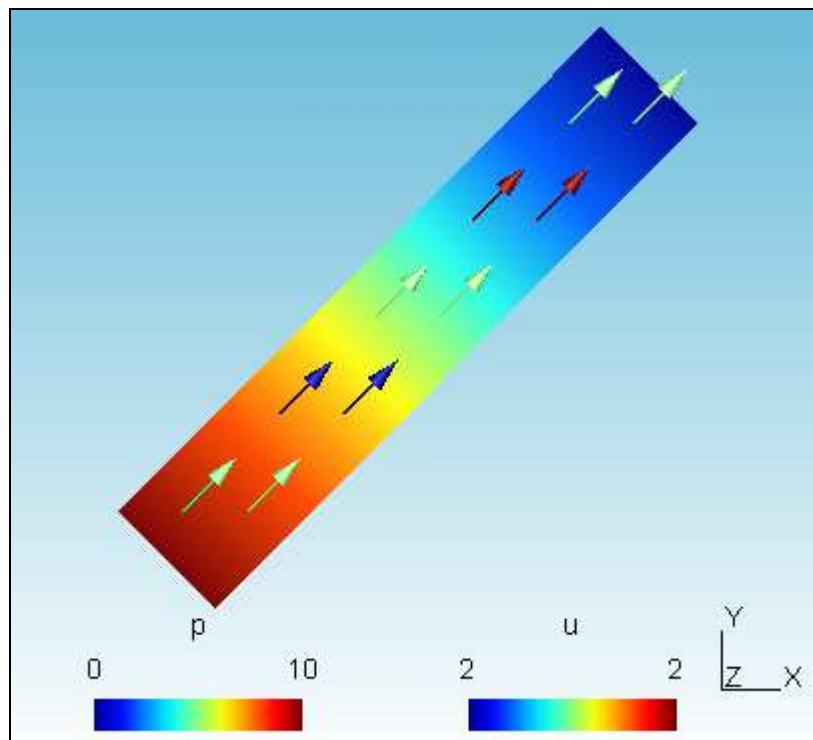
obr. 3-10 – 2D síť

Pole tlakových výšek:



obr. 3-11 - tlakové výšky na 2D

Pole rychlostí:



obr. 3-12 - rychlost proudění na 2D

Výsledek testu:

Řešení prvního a druhého testu jsou shodná, volba sítě je nezávislá na natočení souřadného systému.

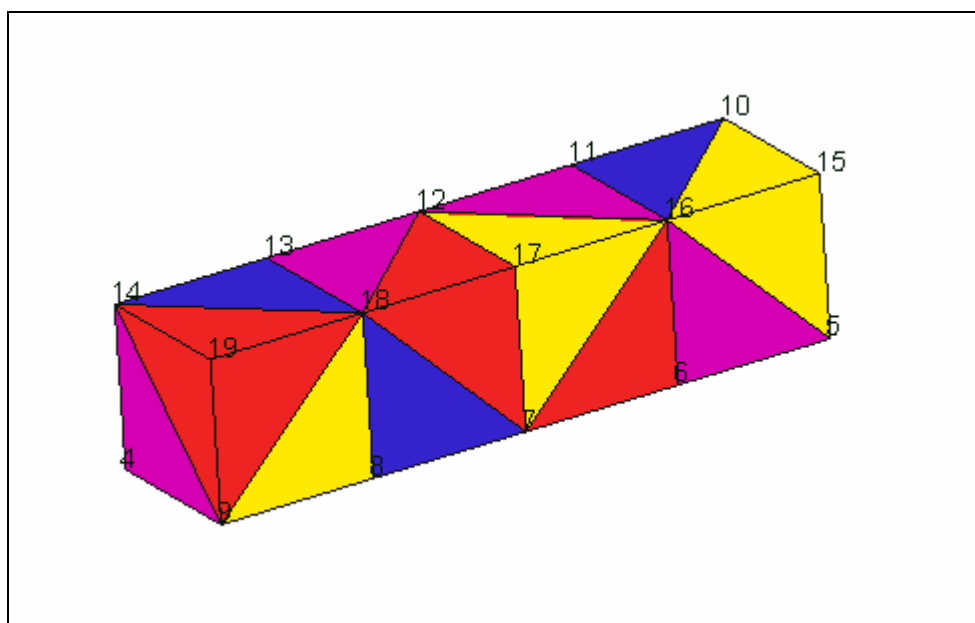
Odlišné barvy vektorů rychlosti jsou způsobeny již při tvorbě sítě zadáváním zaokrouhlených – tedy nepřesných hodnot souřadnic (z důvodu realizace natočené sítě).

3.3 Model s 3D elementy

3.3.1 TEST 5

Opět použijeme nejjednodušší možnou testovací úlohu kanálu s předepsanými Dirichletovými okrajovými podmínkami na obou koncích. Na uzlech 4, 9, 14 a 19: $P_1 = 0$, a na uzlech 0, 5, 10 a 15: $P_2 = 4$. Propustnost $K =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ a délka kanálu je } d = 4.$$



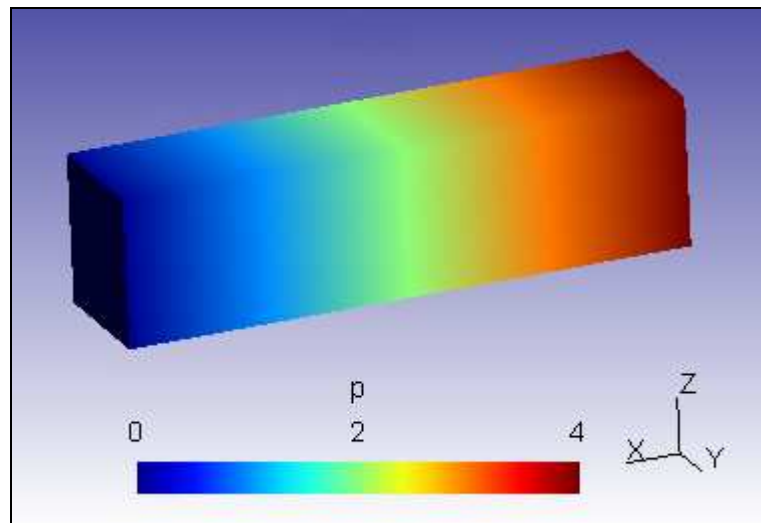
obr. 3-13 – 3D síť

Analytické řešení (ve směru osy x):

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{d}(p_2 - p_1) = -\frac{1}{4}(4 - 0) = \underline{-1} \quad (31)$$

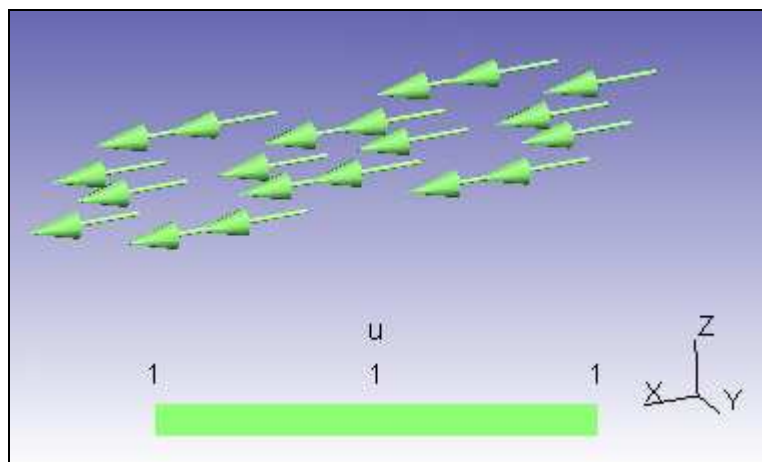
Numerické řešení:

Rozložení tlakových výšek:



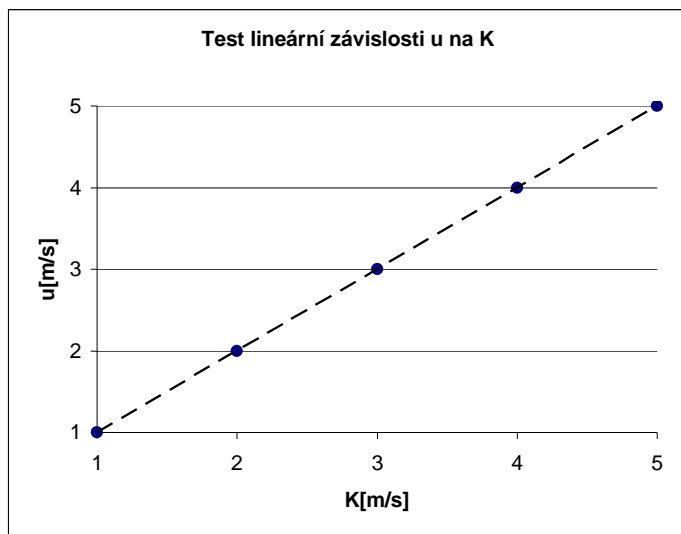
obr. 3-14 - tlakové výšky na 3D

Pole rychlostí:



obr. 3-15 - rychlost proudění na 3D

graf 3.5 - test linearity 3D

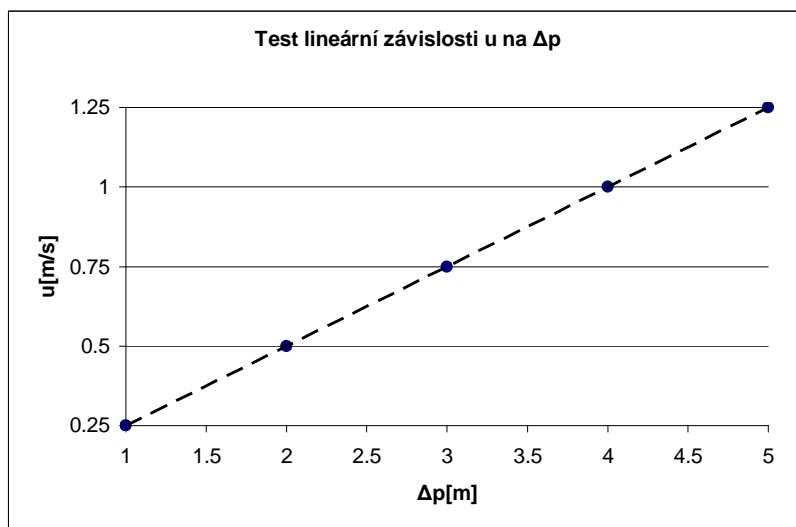


tab. 3-5 - test linearity 3D

K[m/s]	u[m/s]
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

kde rozdíl tlakových výšek mezi oběma konci kanálu je konstantně $\Delta p = 4$ a délka kanálu je $d = 4$.

graf 3-6 - test linearity 3D



tab. 3-6 - test linearity 3D

Δp [m]	u [m/s]
1	0,25
2	0,5
3	0,75
4	1
5	1,25

kde tenzor propustnosti K je jednotková matice a délka kanálu $d = 4$.

Výsledek testu:

Numerické řešení se shoduje s analytickým řešením.

Grafy a tabulky ukazují, že tok je i v případě 3D lineárně závislý na měnícím se tenzoru propustnosti a že je také lineárně závislý na měnícím se rozdílu tlakových výšek mezi oběma konci 3D kanálu.

3.4 Kombinovaný model

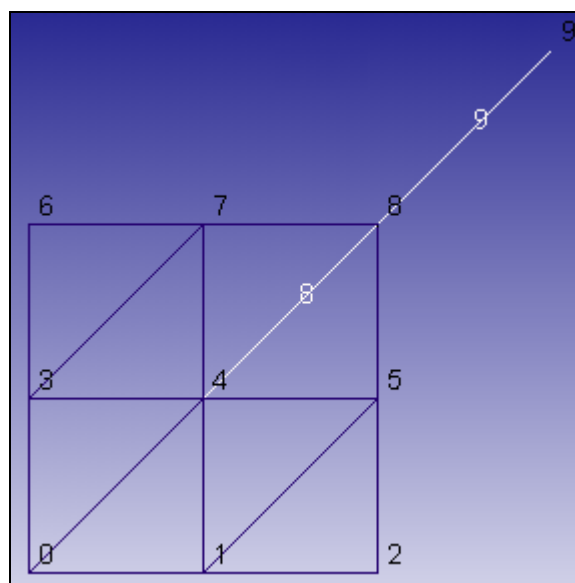
3.4.1 TEST 6

Tentokrát budeme testovat podélné proudění v kombinaci 1D a 2D elementů. Na obr.4-21 je síť, kde do čtvercové oblasti 2D elementů vtéká kapalina z 1D elementu (červené elementy 8 a 9). Otestujme tedy, jak se chová tento typ úlohy:

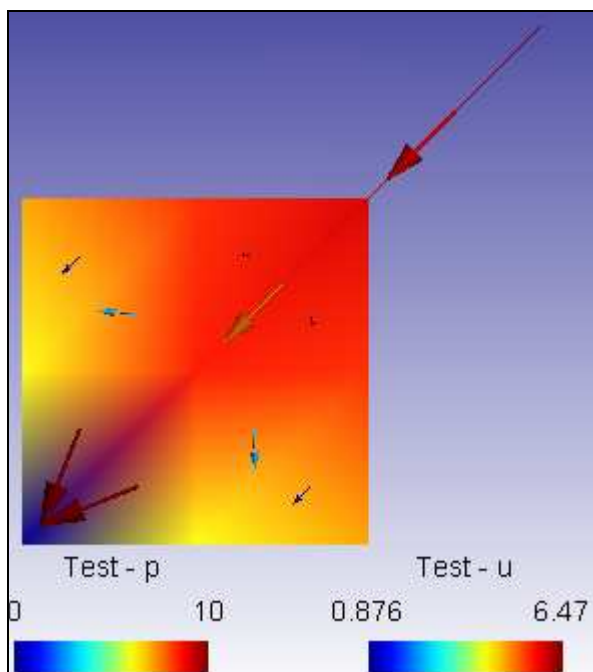
Do uzlu 9 zadáme Dirichletovu okrajovou podmínku $P_9 = 10$ a do uzlu 0 zadáme $P_0 = 0$. Pro 2D elementy platí $K_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pro 1D elementy postupně

$K_L = 10$, $K_L = 1$ a $K_L = 0.01$

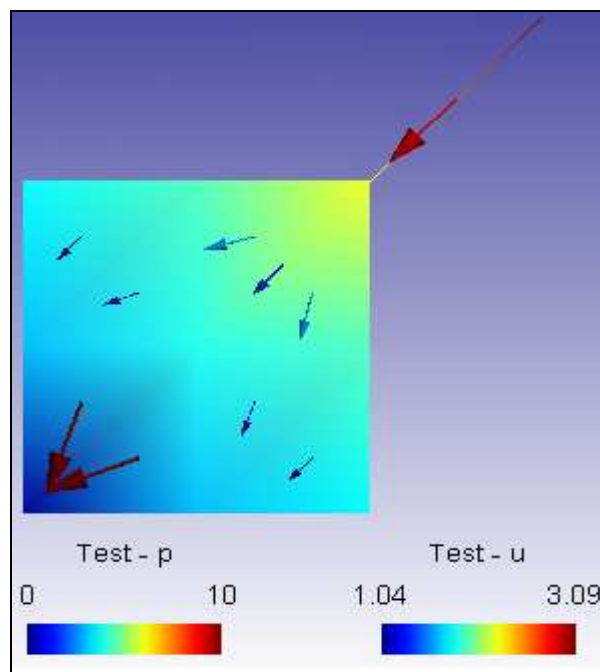
Síť:



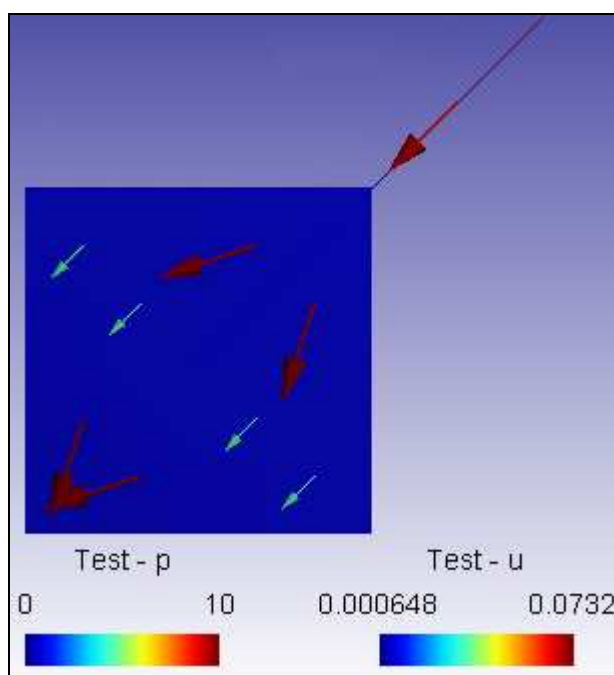
obr. 3-16 - síť kombinace 2D a 1D



obr. 3-17 - výsledek kombinace pro $K = 10$



obr. 3-18 - výsledek kombinace pro $K = 1$



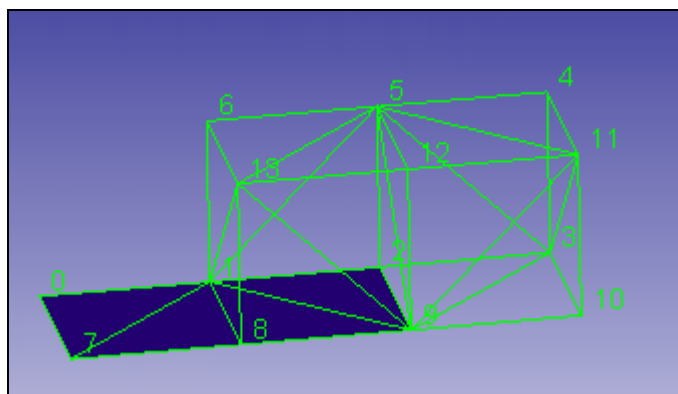
obr. 3-19 - výsledek kombinace pro $K = 0.01$

Výsledek testu:

Kapalina tekoucí z 1D elementu postupně vytéká do 2D oblasti. S měnící se propustností 1D materiálu se mění tlakové výšky resp. rychlosti. Intuitivně lze tvrdit, že tento typ úlohy je počítán správně.

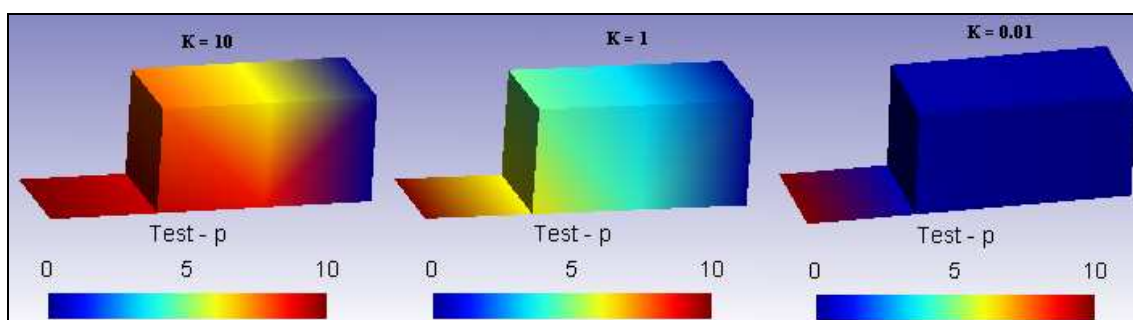
3.4.2 TEST 7

Poslední úloha k otestování je podélný tok kombinací 2D a 3D elementů. Na obr.4-25 je znázorněna síť, v dolní části jsou 4 trojúhelníkové elementy. Na uzlech 0 a 7 je opět Dirichletova okrajová podmínka: $P_{07} = 10$, na uzlech 3, 4, 10 a 11 je $P = 0$. Propustnost 3D elementu je opět jednotková matice příslušných rozměrů a propustnost 2D elementu je jednotková matice násobená postupně 10, 1 a 0.01.



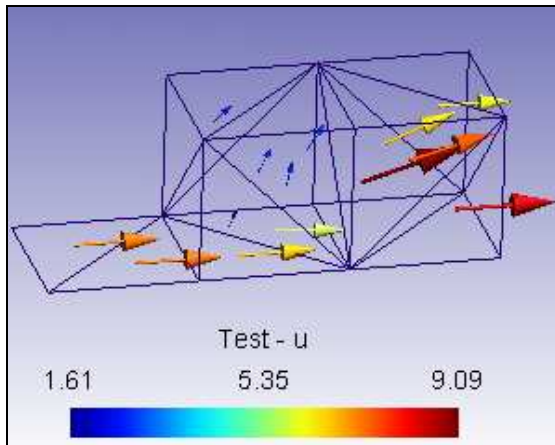
obr. 3-20 - síť kombinace 3D a 2D

Pole tlakových výšek:

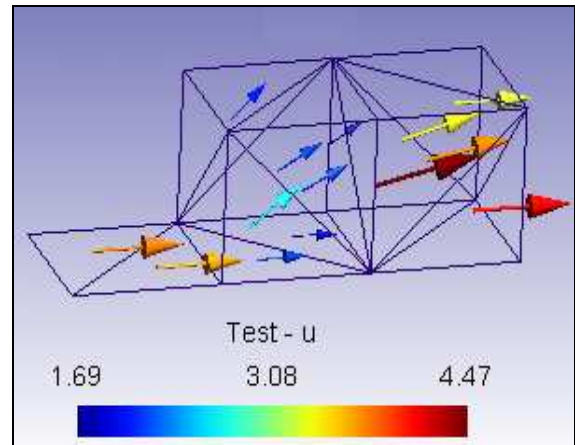


obr. 3-21 - pole tlakových výšek kombinace 3D a 2D

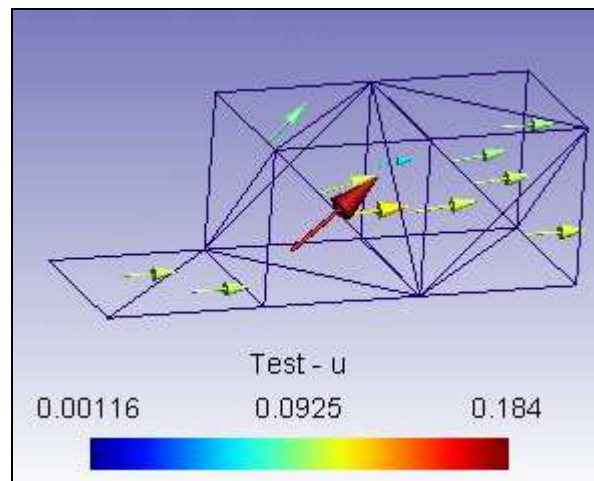
Pole rychlostí:



obr. 3-22 - pole rychlostí pro $K = 10$



obr. 3-23 - pole rychlostí pro $K = 1$



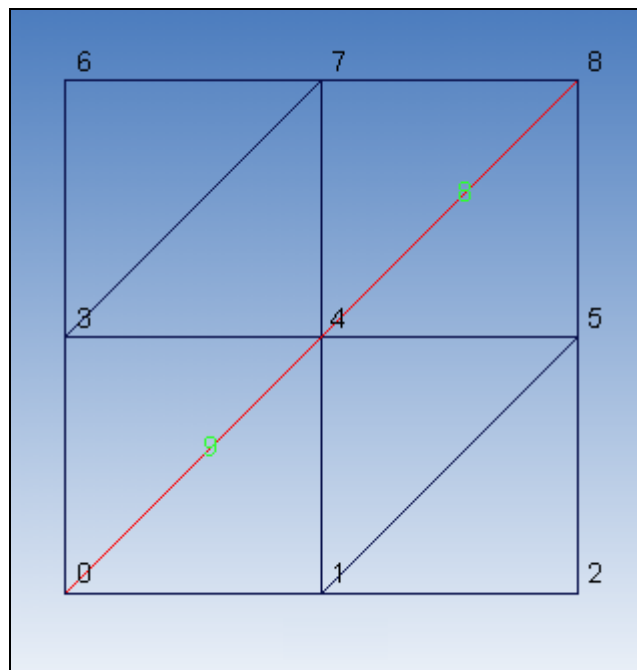
obr. 3-24 - pole rychlostí pro $K = 0.01$

Výsledek testu:

Kapalina tekoucí z 2D elementu postupně vytéká do 3D oblasti. S měnění se propustností 2D materiálu se mění tlakové výšky resp. rychlosti. Intuitivně lze tvrdit, že tento typ úlohy je počítán správně.

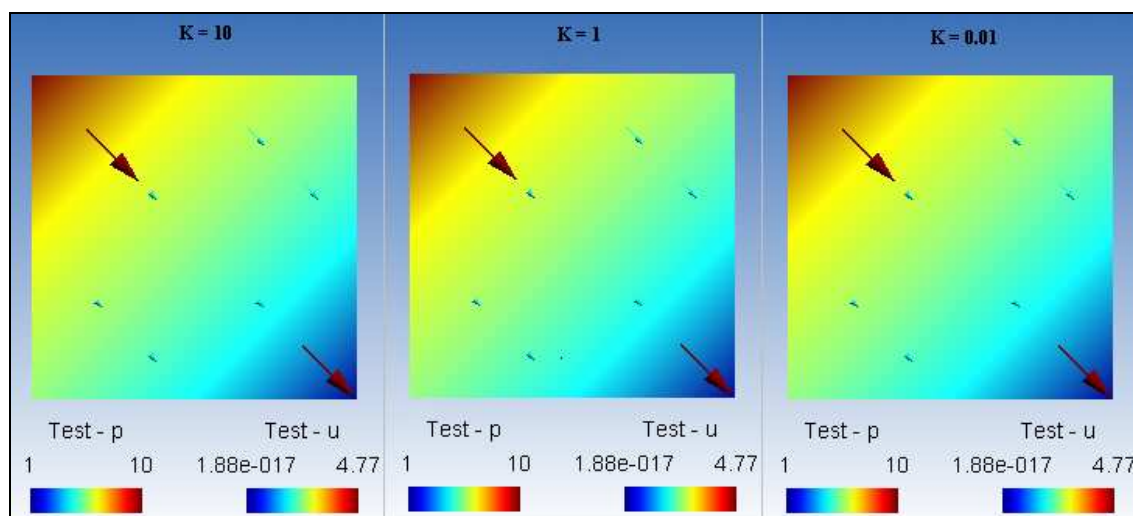
3.4.3 TEST 8

Přejdeme k testování kombinací 1D a 2D elementů v jednom modelu. Otestujme příčný přestup kapaliny přes 1D element. Mějme síť obr.4-16, Dirichletovy okrajové podmínky v uzlech $P_6 = 10$, $P_2 = 1$, propustnost na 2D elementech $K_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, na 1D elementech (na obr. 4-16 jsou znázorněny červeně) postupně $K_L = 10$, $K_L = 1$ a $K_L = 0,01$.



obr. 3-25 - síť kombinovaného modelu

Tlaková a rychlostní pole:



obr. 3-26 - výsledek kombinace 1D a 2D

Výsledek testu:

Z obr.4-14 je patrné, že výsledek pro měnící se koeficient propustnosti 1D elementu je stále stejný, tedy není zde žádná závislost na propustnosti pukliny. Intuitivně se dá očekávat, že se snižující se propustností 1D elementu bude narůstat tlaková výška v části s vyšší hodnotou Dirichletovy okrajové podmínky, tím se bude snižovat rychlost proudění v oblasti.

Tento typ úlohy je počítán chybně. Pro úlohy tohoto typu je v programu potřeba složitějšího algoritmu, díky kterému se v místech sousedství 1D a 2D elementů vytvoří nové uzly pouze pro 1D element, se kterým se dále počítá zvlášť.

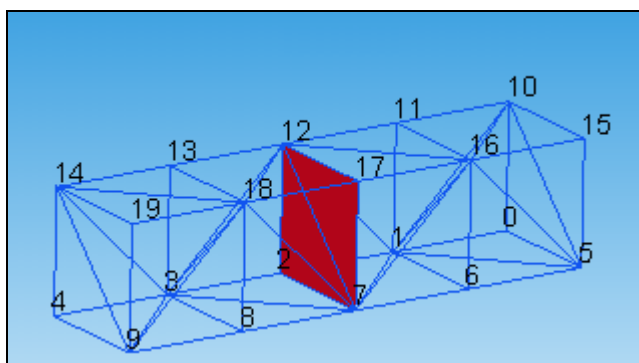
3.4.4 TEST 9

V dalším testu se budeme zabývat chováním modelu v případě kombinace 2D elementu s 3D elementy s příčným přestupem. Vezměme kanál z testu 5, který ve prostřed přetneme dvěma trojúhelníkovými elementy obr.4-18.

Okrajové podmínky typu Dirichlet pro uzly: 4, 9, 14, 19: $P_1 = 0$, a pro

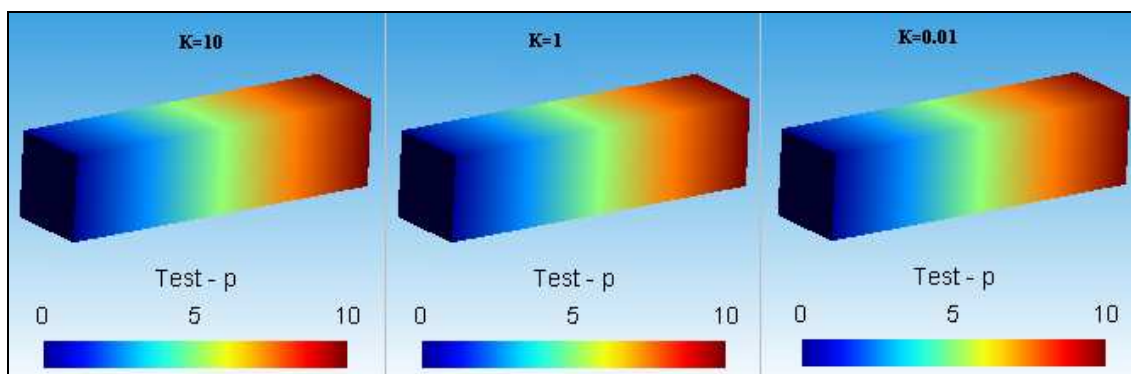
uzly: 0, 5, 10, 15: $P_2 = 10$, propustnost čtyřstěňů $K_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, propustnost

2D elementu postupně $K_T = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $K_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $K_T = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$.



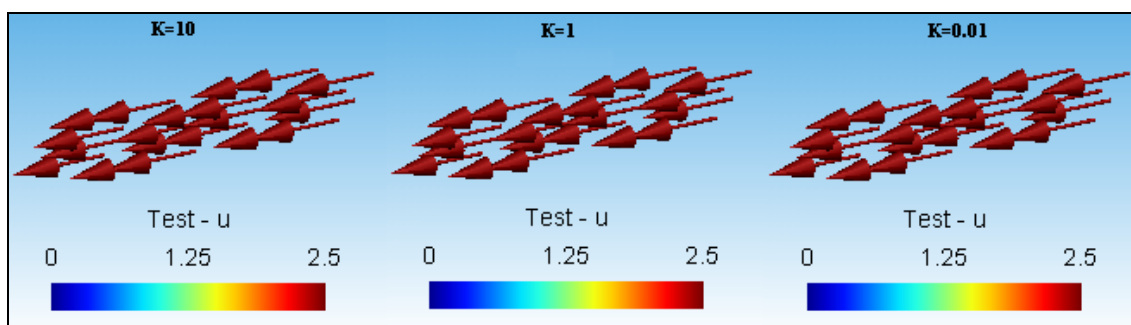
obr. 3-27 - síť kombinovaného modelu

Tlakové pole:



obr. 3-28 - pole tlakových výšek

Pole rychlostí:



obr. 3-29 - pole rychlostí kombinace 3D a 2D

Výsledek testu:

Podobně jako u kombinace 1D a 2D elementů je i zde problém v nezávislosti tlakového a rychlostního pole 3D elementů na propustnosti 2D elementu.

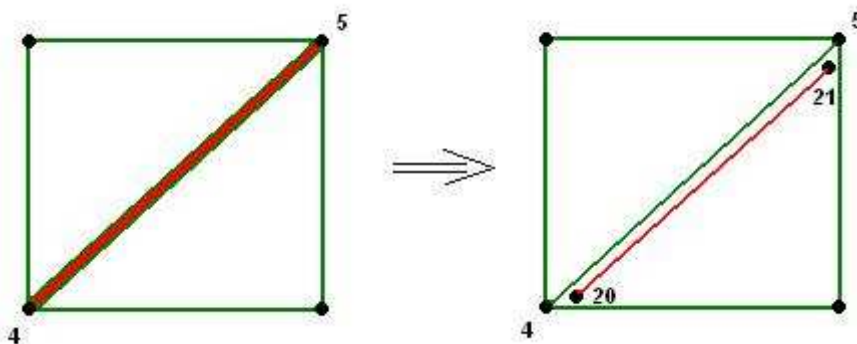
Pro úlohy tohoto typu je v programu opět potřeba složitějšího algoritmu, díky kterému se v místech sousedství 2D a 3D elementů vytvoří nové uzly pouze pro 2D element, se kterým se dále počítá zvlášť.

4 ZÁVĚR

Cílem práce bylo rozšířit program 123Flow o možnost výpočtu úlohy proudění založené na primární formulaci MKP. Implementace primárního modelu proběhla úspěšně, 123Flow nyní umí počítat model podzemního proudění s využitím 1D, 2D a 3D prvků.

V této bakalářské práci se nepodařil vyřešit jeden typ úlohy, a to kombinace dvou dimenzí, kde element nižší dimenze tvoří přepážku v toku kanálem. Pro tento typ úlohy je ve stručnosti nastíněn postup nutných opatření pro správné vyřešení. Pro jednoduchost se uvádí jen kombinace 2D a 1D, pro kombinaci 3D a 2D elementů je postup analogický.

V místě rozhraní je třeba každý společný uzel inkriminovaného místa v síti nahradit dalším, speciálním pouze pro 1D element (přepážku) (obr. 5-1), který má stejnou polohu jako originální uzel (i když na obrázku je pro názornost vyznačen vedle původního uzlu).



obr. 4-1 - ukázka zdvojených uzlů

V programu se vytvoří speciální lokální matice pro „sousední“ uzly (obr. 5-2) (na obr. 5-1 jsou to 4 a 20 a pak 5 a 21), kde $\sigma \dots$ je přestupový koeficient pro dané rozhraní. Ty se poté vloží na příslušné pozice do globální matice.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} 4 & 20 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 4 \\ 20 \end{array} & \begin{bmatrix} +\sigma & -\sigma \\ -\sigma & +\sigma \end{bmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} 5 & 21 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 5 \\ 21 \end{array} & \begin{bmatrix} +\sigma & -\sigma \\ -\sigma & +\sigma \end{bmatrix}
 \end{array}$$

obr. 4-2 – matice sousedních uzlů

Ostatní chyby v chování modelu byly odstraněny již v průběhu testování na vybraných testovacích úlohách.

I přes výše uvedený nedostatek se program 123Flow stal všestrannějším nástrojem pro výpočet úloh filtračního proudění podzemních vod.

Možné rozšíření této bakalářské práce by spočívalo v implementaci algoritmu potřebného pro správný výpočet kombinovaného modelu s příčným přetokem.

Literatura

- [1] **Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C.:** *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.
- [2] **Dokumentace a zdrojové kódy programu 123flow.** TU Liberec, KMO, 2005.
- [3] **Petr Šaloun:** *Programovací jazyk C pro zelenáče*. Neocortex, 1999.
- [4] **Feynman, Leighton, Sands:** *Feynmanovy přednášky 2/3*. Fragment, 2001.
- [5] **Severýn O.:** *Model filtračního proudění podzemní vody založený na smíšené hybridní formulaci*. Diplomová práce, TU Liberec, 1997.
- [6] **Tauchman M.:** *Model proudění kapaliny v prostředí s puklinovou a porézní propustností ve 2D*. Diplomová práce, TU Liberec, 2004.

Příloha

V této části je popsána struktura přiloženého CD, postup spuštění programu 123Flow a stručný popis vstupních souborů do programu.

Struktura CD:

123Flow – obsahuje zdrojové kódy, exe – soubor programu a potřebné knihovny

Testovací úlohy – obsahem složky je 9 testovacích úloh použitých v BP

GMSH – obsahuje program pro vykreslení výsledků (*.pos)

Bakalářská práce.pdf

Spuštění programu 123Flow:

Program 123Flow je konzolová aplikace v prostředí win32 a je spuštěn příkazovou řádkou ve tvaru:

jméno_programu_ -s_ jméno_řídícího_souboru

příklad: flow123d.exe -s kanal.ini

Povinný parametr *jméno_řídícího_souboru* určuje plné jméno a cestu k řídicímu souboru pro běh programu. V případě výpočtu založeného na primární formulaci se předpokládá nainstalovaný **Matlab**. Pro bezproblémové spuštění je třeba z adresáře 123flow/bin do adresáře obsahující řídicí soubor *.ini požadované úlohy nakopírovat:

- Soubor flow123d.exe
- Dforrt.dll
- gm6.dll
- gm6.lib

Pro vykreslení výsledků je vhodný přiložený program GMSH, výsledky jsou zapsány v souboru *.pos, který je vytvořen v adresáři řídicího souboru.

Vstupní a výstupní soubory

Řídicí soubor

Soubor má strukturu standardního ini-souboru používaného v prostředí MS Windows, tj. sekce, klíče a jejich hodnoty. Pro zápis čísel platí konvence jazyka C.

Jména souborů mohou být zapsána buď jako absolutní cesty, nebo relativně vzhledem k adresáři, ze kterého je program spuštěn. Jména souborů se zadávají včetně přípony.

Sekce: [Global]

Popis: Globální parametry

Klíče:

JMÉNO KLÍČE	TYP HODNOTY	POPIS
Problem_type	int	Druh řešené úlohy. V současnosti je podporována hodnota 1 = ustálené saturované proudění, 2 = neustálené proudění a 5 = ustálené proudění pomocí Primaru (nové)

Description	string	Krátký popis úlohy - libovolný text
-------------	--------	-------------------------------------

Sekce: [Input]

Popis: Jména vstupních souborů programu FFLOW

Klíče:

JMÉNO KLÍČE	TYP HODNOTY	POPIS
Mesh	string	Název souboru popisu sítě
Material	string	Název souboru vlastností materiálu
Boundary	string	Název souboru okrajových podmínek

Sekce: [Run]

Popis: Parametry řídící běh programu

Klíče:

JMÉNO KLÍČE	TYP HODNOTY	POPIS
Log_file	string	Název log-souboru.
Screen_verbosity	int	Množství hlášek vypisovaných na obrazovku. (0 = žádné, ..., 7 = všechny)
Log_verbosity	int	Množství hlášek vypisovaných do log-souboru. (0 = žádné, ..., 7 = všechny)

Sekce: [Solver]

Popis: Parametry řídící chování řešiče soustavy lineárních rovnic.

Klíče:

JMÉNO KLÍČE	TYP HODNOTY	POPIS
Solver_name	string	Příkaz spouštějící externí řešič. Podporované hodnoty jsou: "matlab", "gi8", "si2", "gm6"
Solver_accuracy	double	Požadovaná přesnost řešiče - hodnota rezidua, matice, pro kterou se ukončí iterační řešení. Rozumné hodnoty leží mezi 1e-4 až 1e-10. Větší hodnota = rychlejší běh, horší přesnost
Keep_solver_files	YES/NO	Pokud je nastaveno "YES", nejsou smazány vstupní/výstupní soubory řešiče po jeho běhu.
Manual_solver_run	YES/NO	Pokud je nastaveno "YES", je po zápisu vstupních souborů řešiče zastaven běh programu a uživatel musí spustit řešič ručně. Vhodné pro špatně podmíněné či jinak problematické matice.
Use_control_file	YES/NO	Pokud je nastaveno "YES", je jako řídící soubor řešiče použit externí soubor, jinak je řídící soubor vytvořen programem

		PRIMAR/MIXHYB.
Control_file	string	Jméno řídicího souboru, pokud je nastaveno Use_control_file = Yes

Sekce: [Output]

Popis: Parametry výstupu.

Klíče:

JMÉNO KLÍČE	TYP HODNOTY	POPIS
Write_output_file	YES/NO	Jestliže nastaveno "YES", je zapisován výstupní soubor.
Ouput_file	string	Název výstupního souboru.
Output_digits	int	Počet platných číslic pro zápis floating-point hodnot ve výstupním souboru.

Nutno podotknout, že následující popisy souborů jsou jen stručné pro potřebu základního nastavení primárního modelu, v případě potřeby podrobnějších vysvětlení odkazujeme na [2] nebo na www.geuz.org/gmsh/.

Soubor popisu sítě

Popis sítě je soubor typu .MSH používaný programem GMSH, viz. Má dvě části:

Definice uzlů: v tomto pořadí je identifikační číslo uzlu a jednoznačné určení polohy ve 3D (ve složkách x,y,z)

Definice elementů:

- identifikační číslo elementu,
- typ elementu: 1 = 1D, 2 = 2D(trojúhelník) a 4 = 3D(čtyřstěn)
- počet tagů
- první tag je identifikační číslo materiálu pro daný element(musí souhlasit s id v souboru popisu materiálu)
- druhý tag pomocné rozlišení skupiny elementů v síti pomocí čísel 0-19
- id uzlů definujících element

Soubor materiálů

Soubor je textový, má řádkovou strukturu, pro zápis čísel platí konvence jazyka C. Definice vlastností materiálů má strukturu:

```
...
$MTR
n_materials
material_id type coef
...
$ENDMTR
...
```

Veškeré informace před řádkem "\$MTR" a za řádkem "\$ENDMTR" jsou ignorovány.

n_materials: určuje počet definovaných materiálů.

material_id: identifikační číslo materiálu, unikátní pro každý materiál.

type: typ materiálu $11 = k$ (pro 1D element), $21 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ (pro 2D element),

$$31 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \text{ (pro 3D element)}$$

coef: pro náš případ hodnota k

Soubor okrajových podmínek

```
$BoundaryFormat
1.0 0 8
$EndBoundaryFormat
$BoundaryConditions
n_boundaries
boundary_num boundary_type boundary_value where node_num
...
$EndBoundaryConditions
```

boundary_type: může nabývat hodnot 1 = Dirichlet, 2 = Neumann

where: nabývá v případě výpočtu Primarem pouze 1 = zadáno do uzlu

node_num: je identifikační číslo uzlu, ve kterém je okr. podmínka zadána

Soubor sousedících elementů

Za předpokladu, že je definován soubor popisující síť, materiál a okrajové podmínky, umí 123Flow vytvořit poslední potřebný vstupní soubor – soubor sousedících elementů.

Jestliže se odkážeme na část přílohy spuštění programu, jediný rozdíl pro vytvoření tohoto souboru je ten, že místo „-s“ se zadá „-n“.

Příklad: flow123d.exe -n kanal.ini

Soubor výsledku výpočtů

Tento soubor má formát .POS souborů programu GMSH. Jeho struktura je popsána v dokumentaci programu (konkrétně se jedná o „parsed-post-procesing file“). V tomto souboru jsou uloženy hodnoty skalární veličiny (tlaku/tlakové výšky) na jednotlivých elementech sítě a hodnoty rychlosti proudění na elementech.